# बीजीय व्यंजक एवं सर्वसमिकाएँ

## कक्षा 8 गणित

Complete Study Notes

## सीखने के उद्देश्य

बीजीय व्यंजकों की संरचना को समझना तथा चर, अचर, गुणांक और पदों की पहचान करना। बीजीय व्यंजकों का जोड़, घटाव और गुणा करना सीखना, बहुपदों को सरल बनाना तथा सर्वसमिकाओं का उपयोग करके गणनाओं को तेज़ और सरल बनाना।

## बीजीय व्यंजकों एवं सर्वसमिकाओं का परिचय

बीजगणित गणित की एक महत्वपूर्ण शाखा है जिसमें अज्ञात राशियों को व्यक्त करने के लिए अक्षरों और प्रतीकों का उपयोग किया जाता है। संख्याओं के स्थान पर x, y तथा z जैसे अक्षरों का प्रयोग करके विभिन्न समस्याओं का समाधान किया जाता है। यही कारण है कि बीजगणित का उपयोग विज्ञान, अभियांत्रिकी, कंप्यूटर विज्ञान, अर्थशास्त्र तथा दैनिक जीवन की अनेक समस्याओं में किया जाता है।

बीजीय व्यंजक चर, अचर तथा गणितीय संक्रियाओं से मिलकर बनते हैं। इन व्यंजकों को जोड़ना, घटाना, गुणा करना तथा सरल बनाना बीजगणित की आधारभूत कौशल है। इस अध्याय में सर्वसमिकाओं का भी अध्ययन किया जाता है, जिनकी सहायता से कठिन गणनाओं को बहुत कम समय में हल किया जा सकता है।

## बीजीय व्यंजकों के मूल घटक

बीजीय व्यंजक कई भागों से मिलकर बनता है। **चर (Variable)** वह प्रतीक है जिसका मान बदल सकता है, जैसे x, y, z। **अचर (Constant)** वह निश्चित संख्या होती है जिसका मान कभी नहीं बदलता, जैसे 5, −3 या 12।

बीजीय व्यंजक का प्रत्येक भाग **पद (Term)** कहलाता है। किसी पद में उपस्थित संख्यात्मक भाग को **गुणांक (Coefficient)** कहा जाता है। उदाहरण के लिए, $7x^2$ में 7 गुणांक है तथा $x^2$ चर भाग है।

पदों की संख्या के आधार पर व्यंजकों को वर्गीकृत किया जाता है:

- एक पद वाला व्यंजक **एकपदी** कहलाता है (जैसे: $4x^2$)।
- दो पदों वाला व्यंजक **द्विपदी** कहलाता है (जैसे: $3x + 5$)।
- तीन पदों वाला व्यंजक **त्रिपदी** कहलाता है (जैसे: $x^2 + 2x + 1$)।
- तीन से अधिक पदों वाले व्यंजक **बहुपद** कहलाते हैं।

इन मूल अवधारणाओं की समझ बीजगणित के सभी आगामी अध्यायों के लिए अत्यंत आवश्यक है।

## बीजीय व्यंजकों का जोड़ एवं घटाव

बीजीय व्यंजकों का जोड़ और घटाव केवल **समान पदों** के बीच ही किया जा सकता है। समान पद वे होते हैं जिनमें चर तथा उनके घात समान हों। केवल उनके गुणांक अलग हो सकते हैं।

उदाहरण के लिए,
$2x^2 + 5x^2 = 7x^2$ (क्योंकि दोनों पदों में $x^2$ समान है।)
इसी प्रकार, $8xy - 3xy = 5xy$।

लेकिन, 4x और 4y समान पद नहीं हैं क्योंकि उनके चर अलग हैं। इसी प्रकार 3x तथा $3x^2$ भी असमान पद हैं क्योंकि उनके घात अलग हैं।

दो या अधिक व्यंजकों का जोड़ या घटाव करते समय पहले कोष्ठकों को हटाया जाता है और फिर समान पदों को मिलाकर अंतिम उत्तर प्राप्त किया जाता है।
उदाहरण, $(2x^2 + 3x) + (5x^2 - x) = 7x^2 + 2x$।

## बीजीय व्यंजकों का गुणा

बीजीय व्यंजकों के गुणा में सबसे पहले गुणांकों का गुणा किया जाता है और समान आधार वाले चरों के घातों को जोड़ दिया जाता है।
उदाहरण, $(3x)(-5xy) = -15x^2y$।

जब किसी एकपदी का गुणा किसी बहुपद से किया जाता है, तब वितरण नियम (Distributive Property) का प्रयोग किया जाता है। बाहरी पद को कोष्ठक के प्रत्येक पद से गुणा किया जाता है।
उदाहरण, $2x(3x + y) = 6x^2 + 2xy$।

दो बहुपदों का गुणा करते समय पहले बहुपद का प्रत्येक पद दूसरे बहुपद के प्रत्येक पद से गुणा किया जाता है। इसके बाद प्राप्त समान पदों को जोड़कर अंतिम व्यंजक को सरल बनाया जाता है।
उदाहरण, $(x + 4)(x + 2) = x^2 + 4x + 2x + 8 = x^2 + 6x + 8$।

## सर्वसमिकाएँ

सर्वसमिका वह बीजीय समानता है जो चरों के प्रत्येक मान के लिए सदैव सत्य रहती है। यह सामान्य समीकरण से भिन्न होती है क्योंकि समीकरण केवल कुछ विशेष मानों के लिए सत्य होता है।

> **महत्वपूर्ण सर्वसमिकाएँ:**
> • $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
> • $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
> • $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
> • $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

इन सर्वसमिकाओं का उपयोग व्यंजकों के विस्तार, गुणनखंड, मानसिक गणना तथा कठिन प्रश्नों को सरल बनाने में किया जाता है।
उदाहरण के लिए, $103^2 = (100 + 3)^2 = 100^2 + 2(100)(3) + 3^2 = 10000 + 600 + 9 = 10609$।
सर्वसमिकाओं का नियमित अभ्यास विद्यार्थियों की गणना की गति और शुद्धता दोनों को बढ़ाता है।

## बीजीय व्यंजकों एवं सर्वसमिकाओं का महत्व

बीजीय व्यंजकों का उपयोग विज्ञान, अभियांत्रिकी, कंप्यूटर प्रोग्रामिंग, वास्तुकला, वित्त तथा सांख्यिकी सहित अनेक क्षेत्रों में किया जाता है। सर्वसमिकाएँ गणनाओं को सरल बनाती हैं और आगे चलकर बहुपद, गुणनखंड, द्विघात समीकरण तथा उच्च बीजगणित के अध्ययन की मजबूत नींव तैयार करती हैं।

## अभ्यास प्रश्न

1. $9x^2$ में गुणांक तथा चर ज्ञात कीजिए।
2. $4x + 3x - 2x$ को सरल कीजिए।
3. $3x(2x + 5)$ का गुणा कीजिए।
4. $(x + 4)(x + 2)$ का विस्तार कीजिए।
5. $(a + b)^2$ का विस्तार लिखिए।

## उत्तर

- **उत्तर 1:** $9x^2$ में गुणांक 9 तथा चर भाग $x^2$ है।
- **उत्तर 2:** $4x + 3x - 2x = 5x$।
- **उत्तर 3:** $3x(2x + 5) = 6x^2 + 15x$।
- **उत्तर 4:** $(x + 4)(x + 2) = x^2 + 6x + 8$।
- **उत्तर 5:** $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$।