# घन तथा घनमूल

## कक्षा 8 गणित

**Complete Study Notes**

## सीखने के उद्देश्य

घन संख्या तथा घनमूल की अवधारणा को समझना। पूर्ण घनों के गुणों का अध्ययन करना, अभाज्य गुणनखंडन द्वारा पूर्ण घनों की पहचान करना, विभिन्न विधियों से घनमूल ज्ञात करना तथा बड़ी संख्याओं एवं परिमेय भिन्नों के घनमूल निकालना सीखना।

## परिचय

घन तथा घनमूल गणित के महत्वपूर्ण विषय हैं जो घातांक, बीजगणित, क्षेत्रमिति तथा उच्च गणित की आधारशिला हैं। किसी संख्या को स्वयं से तीन बार गुणा करने पर प्राप्त संख्या उसका घन कहलाती है, जबकि किसी संख्या का घनमूल वह संख्या होती है जिसका तीन बार गुणा करने पर मूल संख्या प्राप्त हो।

घन संख्याओं के गुणों और प्रतिरूपों को समझने से गणनाएँ सरल हो जाती हैं तथा विद्यार्थियों की तार्किक एवं विश्लेषणात्मक क्षमता विकसित होती है।

## घन संख्याएँ

जब किसी प्राकृतिक संख्या को स्वयं से तीन बार गुणा किया जाता है, तब प्राप्त संख्या पूर्ण घन (Perfect Cube) कहलाती है। उदाहरण के लिए 4 × 4 × 4 = 64, इसलिए 64 एक पूर्ण घन है। इसी प्रकार 7 × 7 × 7 = 343, इसलिए 343 भी पूर्ण घन है।

> **1 से 10 तक के घन:** $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$, $4^3 = 64$, $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, $7^3 = 343$, $8^3 = 512$, $9^3 = 729$ तथा $10^3 = 1000$।
> **पूर्ण घनों के गुण:** सम संख्या का घन सदैव सम तथा विषम संख्या का घन सदैव विषम होता है। किसी पूर्ण घन के अंत में शून्यों की संख्या हमेशा तीन के गुणज में होती है। जिन संख्याओं के अंत में केवल एक या दो शून्य होते हैं, वे पूर्ण घन नहीं हो सकतीं।

## अभाज्य गुणनखंडन और पूर्ण घन

पूर्ण घनों की पहचान करने की सबसे सरल विधि अभाज्य गुणनखंडन है। किसी भी पूर्ण घन में प्रत्येक अभाज्य गुणनखंड तीन-तीन के समूह (त्रिक) में उपस्थित होता है। यदि कोई गुणनखंड तीन के समूह में नहीं है, तो वह संख्या पूर्ण घन नहीं होगी।

इसी नियम की सहायता से यह भी ज्ञात किया जाता है कि किसी संख्या को पूर्ण घन बनाने के लिए किस सबसे छोटी संख्या से गुणा या भाग करना होगा। यदि कोई गुणनखंड त्रिक पूरा नहीं करता, तो गुणा वाले प्रश्नों में आवश्यक गुणनखंड जोड़े जाते हैं तथा भाग वाले प्रश्नों में अतिरिक्त गुणनखंड हटा दिए जाते हैं। यह विधि विद्यार्थियों को पूर्ण घनों से संबंधित प्रश्नों को सरलता और सटीकता से हल करने में सहायता करती है।

## घनमूल ज्ञात करने की विधियाँ

घनमूल किसी संख्या के घन की विपरीत क्रिया है। यदि $6^3 = 216$, तो $\sqrt[3]{216} = 6$ होगा। घनमूल को $\sqrt[3]{}$ चिन्ह द्वारा दर्शाया जाता है।

घनमूल ज्ञात करने की सबसे सामान्य विधि अभाज्य गुणनखंडन विधि है। इसमें संख्या के सभी अभाज्य गुणनखंड किए जाते हैं। समान गुणनखंडों के तीन-तीन के समूह बनाए जाते हैं और प्रत्येक समूह से एक-एक गुणनखंड लेकर उनका गुणनफल किया जाता है।

उदाहरण के लिए,
216 = 2 × 2 × 2 × 3 × 3 × 3
तीन-तीन के समूह बनाने पर,
(2 × 2 × 2) × (3 × 3 × 3)
प्रत्येक समूह से एक गुणनखंड लेने पर,
$\sqrt[3]{216} = 2 \times 3 = 6$।

## बड़ी संख्याओं एवं परिमेय भिन्नों का घनमूल

बड़ी पूर्ण घन संख्याओं का घनमूल अनुमान विधि द्वारा भी ज्ञात किया जा सकता है। इसमें संख्या को दाईं ओर से तीन-तीन अंकों के समूहों में बाँटा जाता है। अंतिम समूह का अंतिम अंक घनमूल के इकाई अंक का संकेत देता है, जबकि पहला समूह घनमूल के प्रारंभिक अंक को निर्धारित करने में सहायता करता है।

परिमेय भिन्नों का घनमूल ज्ञात करने के लिए अंश और हर का घनमूल अलग-अलग निकाला जाता है।
उदाहरण के लिए,
$\sqrt[3]{(64/125)} = \sqrt[3]{64} \div \sqrt[3]{125} = 4/5$।
यह नियम भिन्नों से संबंधित प्रश्नों को सरलता से हल करने में अत्यंत उपयोगी है।

## घन तथा घनमूल का महत्व

घन तथा घनमूल का उपयोग ज्यामिति में आयतन ज्ञात करने, इंजीनियरिंग, वास्तुकला, विज्ञान, सांख्यिकी तथा अनेक व्यावहारिक गणनाओं में किया जाता है। इन अवधारणाओं की अच्छी समझ विद्यार्थियों को आगे चलकर बीजगणित, निर्देशांक ज्यामिति तथा उच्च गणित का अध्ययन करने में सहायता प्रदान करती है।

### अभ्यास प्रश्न

1. क्या 729 एक पूर्ण घन है?
2. 12 का घन ज्ञात कीजिए।
3. 512 का घनमूल ज्ञात कीजिए।
4. 72 को पूर्ण घन बनाने के लिए किस सबसे छोटी संख्या से गुणा करना होगा?
5. 64/125 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

## उत्तर

- **उत्तर 1:** हाँ। $729 = 9^3$, इसलिए यह एक पूर्ण घन है।
- **उत्तर 2:** $12^3 = 12 \times 12 \times 12 = 1728$।
- **उत्तर 3:** $\sqrt[3]{512} = 8$, क्योंकि $8 \times 8 \times 8 = 512$।
- **उत्तर 4:** $72 = 2^3 \times 3^2$। तीन का एक और गुणनखंड जोड़ने पर पूर्ण त्रिक बनता है। अतः सबसे छोटी संख्या 3 है।
- **उत्तर 5:** $\sqrt[3]{(64/125)} = \sqrt[3]{64} \div \sqrt[3]{125} = 4/5$।