घातांक और घात

कक्षा 8 गणित

Complete Study Notes

सीखने के उद्देश्य

घातांक और घात की अवधारणा को समझना। बार-बार होने वाले गुणा को घात के रूप में लिखना सीखना, घातांकों के नियमों का प्रयोग करके व्यंजकों को सरल बनाना, ऋणात्मक एवं शून्य घातांकों को समझना तथा बहुत बड़ी और बहुत छोटी संख्याओं को मानक रूप (Scientific Notation) में लिखना सीखना।

घातांक और घात का परिचय

घातांक और घात गणित की अत्यंत महत्वपूर्ण अवधारणाएँ हैं क्योंकि ये बार-बार होने वाले गुणा को सरल रूप में व्यक्त करने का माध्यम प्रदान करती हैं। यदि किसी संख्या को कई बार स्वयं से गुणा किया जाए, तो उसे बार-बार लिखने के बजाय घातांक का प्रयोग किया जाता है। यही कारण है कि बीजगणित, विज्ञान, कंप्यूटर विज्ञान, अभियांत्रिकी तथा वित्त जैसे अनेक क्षेत्रों में घातांकों का व्यापक उपयोग होता है॰

घातों के नियमों को समझने से जटिल गणनाएँ सरल हो जाती हैं तथा विद्यार्थी बड़ी और छोटी संख्याओं के साथ आसानी से कार्य कर सकते हैं। यह अध्याय आगे आने वाले बीजगणित और उच्च गणित की मजबूत नींव तैयार करता है।

घातांक और घात का अर्थ

जब किसी संख्या को स्वयं से कई बार गुणा किया जाता है, तो उसे घात के रूप में लिखा जाता है। यदि किसी संख्या को a^n के रूप में लिखा गया है, तो a को आधार (Base) तथा n को घातांक (Exponent) कहा जाता है। घातांक यह बताता है कि आधार को स्वयं से कितनी बार गुणा किया गया है।

उदाहरण के लिए,
$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$
यहाँ 5 आधार तथा 3 घातांक है। इसी प्रकार, $10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$।

> **ऋणात्मक घातांक:** किसी गैर-शून्य संख्या का ऋणात्मक घात उसके धनात्मक घात के व्युत्क्रम (Reciprocal) के बराबर होता है।
> **$a^{-m} = 1 / a^m$**
> उदाहरण के लिए, $2^{-3} = 1/2^3 = 1/8$। ऋणात्मक घातांक का प्रयोग विशेष रूप से वैज्ञानिक गणनाओं और मानक रूप में किया जाता है।

घातांकों के नियम

घातांकों के नियम कठिन गणनाओं को अत्यंत सरल बना देते हैं। इन नियमों की सहायता से बड़ी-बड़ी घातों वाले व्यंजकों को कुछ ही चरणों में हल किया जा सकता है।

- **गुणा का नियम:** यदि समान आधार वाली दो घातों का गुणा किया जाए, तो उनके घातांकों को जोड़ दिया जाता है।
  $a^m \times a^n = a^{m+n}$
  उदाहरण: $2^3 \times 2^4 = 2^7 = 128$।

- **भाग का नियम:** यदि समान आधार वाली घातों का भाग किया जाए, तो उनके घातांकों का अंतर लिया जाता है।
  $a^m \div a^n = a^{m-n}$
  उदाहरण: $5^6 \div 5^2 = 5^4 = 625$।
- **घात की घात:** यदि किसी घात की पुनः घात ली जाए, तो दोनों घातांकों का गुणा किया जाता है।
  $(a^m)^n = a^{mn}$
  उदाहरण: $(3^2)^4 = 3^8 = 6561$।
- **समान घातांक वाले अलग आधार:** यदि विभिन्न आधारों की घात समान हो, तो पहले आधारों का गुणा करके घात यथावत रखी जाती है।
  $a^m \times b^m = (ab)^m$
- **शून्य घातांक का नियम:** किसी भी गैर-शून्य संख्या का शून्य घात सदैव 1 होता है।
  $a^0 = 1$
  उदाहरण: $25^0 = 1$ तथा $1000^0 = 1$।

मानक रूप (Scientific Notation)

बहुत बड़ी तथा बहुत छोटी संख्याओं को सरल रूप में लिखने के लिए मानक रूप का प्रयोग किया जाता है। वैज्ञानिक, अभियंता तथा गणितज्ञ लंबी संख्याओं को संक्षिप्त और स्पष्ट रूप में व्यक्त करने के लिए इसी पद्धति का उपयोग करते हैं।

मानक रूप का सामान्य स्वरूप होता है:
$k \times 10^n$
जहाँ $1 \le k < 10$ तथा n एक पूर्णांक होता है।

यदि संख्या बहुत बड़ी हो, तो दशमलव बिंदु को बाईं ओर ले जाया जाता है और घातांक धनात्मक होता है।
उदाहरण: $150000000 = 1.5 \times 10^8$ और $7200000 = 7.2 \times 10^6$।

यदि संख्या बहुत छोटी हो, तो दशमलव बिंदु को दाईं ओर ले जाया जाता है और घातांक ऋणात्मक होता है।
उदाहरण: $0.000007 = 7 \times 10^{-6}$ तथा $0.00045 = 4.5 \times 10^{-4}$।

मानक रूप के माध्यम से संख्याओं की तुलना करना, गणनाएँ करना तथा वैज्ञानिक आँकड़ों को प्रस्तुत करना अत्यंत सरल हो जाता है।

घातांक और मानक रूप का महत्व

घातांकों का उपयोग कंप्यूटर विज्ञान, बैंकिंग, जनसंख्या वृद्धि, चक्रवृद्धि ब्याज, रेडियोधर्मी क्षय, भौतिकी, रसायन विज्ञान तथा अभियांत्रिकी जैसे अनेक क्षेत्रों में किया जाता है। वैज्ञानिक मानक रूप की सहायता से ग्रहों की दूरियाँ, सूक्ष्म जीवों का आकार, परमाणुओं का आकार तथा विशाल वैज्ञानिक आँकड़ों को आसानी से प्रस्तुत करते हैं। घातांक और घात की अच्छी समझ विद्यार्थियों को आगे चलकर बीजगणित, लघुगणक, बहुपद तथा उच्च गणित के अध्ययन में अत्यंत सहायता प्रदान करती है।

अभ्यास प्रश्न

1. 7^5 में आधार तथा घातांक बताइए।
2. $3^4 \times 3^2$ को सरल कीजिए।
3. $5^7 \div 5^3$ का मान ज्ञात कीजिए।
4. 0.00009 को मानक रूप में लिखिए।
5. 48,000,000 को वैज्ञानिक रूप में व्यक्त कीजिए।

उत्तर

- **उत्तर 1:** 7^5 में आधार 7 तथा घातांक 5 है।
- **उत्तर 2:** $3^4 \times 3^2 = 3^6 = 729$।
- **उत्तर 3:** $5^7 \div 5^3 = 5^4 = 625$।
- **उत्तर 4:** $0.00009 = 9 \times 10^{-5}$।
- **उत्तर 5:** $48{,}000{,}000 = 4.8 \times 10^7$।