संख्याओं से खेलना

कक्षा 8 गणित

Complete Study Notes

सीखने के उद्देश्य

संख्याओं के व्यापक रूप को समझना, स्थानीय मानों की सहायता से संख्याओं को व्यक्त करना, अंकों को उलटने पर बनने वाले रोचक गणितीय संबंधों का अध्ययन करना, विभाज्यता के नियमों के पीछे के गणितीय तर्क को समझना तथा क्रिप्टअरिथ्म जैसी गणितीय पहेलियों को तार्किक ढंग से हल करना सीखना।

परिचय

गणित में संख्याएँ केवल गिनती करने का माध्यम नहीं हैं, बल्कि इनके भीतर अनेक रोचक नियम, प्रतिरूप और संबंध छिपे होते हैं। इस अध्याय में विद्यार्थी सीखते हैं कि किसी भी संख्या को उसके अंकों और उनके स्थानीय मानों की सहायता से व्यापक रूप में कैसे लिखा जाता है। यही अवधारणा आगे चलकर बीजगणित तथा संख्या पद्धति को समझने में अत्यंत उपयोगी सिद्ध होती है।

इस अध्याय में विभाज्यता के नियमों के पीछे छिपे तर्क को भी समझाया गया है। इसके साथ ही क्रिप्टअरिथ्म जैसी रोचक गणितीय पहेलियों के माध्यम से तार्किक सोच, विश्लेषण करने की क्षमता तथा समस्या समाधान कौशल का विकास होता है।

संख्याओं का व्यापक रूप

प्रत्येक संख्या विभिन्न अंकों से मिलकर बनी होती है और प्रत्येक अंक का अपना एक स्थानीय मान होता है। किसी संख्या को उसके स्थानीय मानों के आधार पर लिखना उसका व्यापक रूप (Generalised Form) कहलाता है।

> **दो अंकों की संख्या:** यदि कोई दो अंकों की संख्या ab है, जहाँ a दहाई का अंक तथा b इकाई का अंक है, तो उसे इस प्रकार लिखा जाता है:
> **$ab = 10a + b$**
> **तीन अंकों की संख्या:** यदि कोई तीन अंकों की संख्या abc है, तो उसका व्यापक रूप होगा:
> **$abc = 100a + 10b + c$**

इस प्रकार किसी संख्या को स्थानीय मानों के आधार पर व्यक्त करने से उसकी संरचना स्पष्ट रूप से समझ में आती है। यही विधि आगे चलकर विभाज्यता के नियमों तथा अनेक गणितीय प्रमाणों को समझने में सहायता करती है।

अंकों को उलटने पर बनने वाले प्रतिरूप

व्यापक रूप का उपयोग करके संख्याओं के कई रोचक गुणों को समझा जा सकता है। यदि ab किसी दो अंकों की संख्या है, तो उसके अंकों को उलटने पर संख्या ba बनती है।

यदि इन दोनों संख्याओं को जोड़ा जाए:
$ab + ba = 11(a + b)$
अर्थात दोनों संख्याओं का योग सदैव 11 से विभाजित होता है।

इसी प्रकार यदि बड़ी संख्या में से छोटी संख्या घटाई जाए:
$ab - ba = 9(a - b)$

तो अंतर सदैव 9 से विभाजित होता है। ये परिणाम सिद्ध करते हैं कि गणित में अनेक नियम केवल संयोग नहीं होते, बल्कि उनके पीछे स्पष्ट बीजगणितीय तर्क होता है।

विभाज्यता के नियम

विभाज्यता के नियम बड़ी संख्याओं की जाँच करने का सरल और तेज़ तरीका प्रदान करते हैं। इन नियमों की सहायता से बिना पूरी भाग देने की प्रक्रिया किए यह ज्ञात किया जा सकता है कि कोई संख्या किसी दूसरी संख्या से पूर्णतः विभाजित होगी या नहीं।

- यदि किसी संख्या का अंतिम अंक 0, 2, 4, 6 या 8 हो, तो वह संख्या **2** से विभाजित होती है।
- यदि किसी संख्या का अंतिम अंक 0 या 5 हो, तो वह संख्या **5** से विभाजित होती है।
- **3 तथा 9** से विभाज्यता ज्ञात करने के लिए संख्या के सभी अंकों का योग किया जाता है। यदि अंकों का योग 3 से विभाजित होता है, तो पूरी संख्या भी 3 से विभाजित होगी। इसी प्रकार यदि अंकों का योग 9 से विभाजित होता है, तो संख्या भी 9 से विभाजित होगी।

क्रिप्टअरिथ्म और अक्षर पहेलियाँ

क्रिप्टअरिथ्म ऐसी गणितीय पहेलियाँ होती हैं जिनमें अंकों के स्थान पर अक्षरों का प्रयोग किया जाता है। इन पहेलियों का उद्देश्य प्रत्येक अक्षर का सही अंक ज्ञात करना होता है ताकि दिया गया जोड़, घटाव या गुणा सही सिद्ध हो सके।

ऐसी पहेलियों को हल करते समय दो महत्वपूर्ण नियमों का पालन करना आवश्यक होता है:
1. प्रत्येक अक्षर केवल एक ही अंक का प्रतिनिधित्व करता है।
2. किसी भी बहु-अंकीय संख्या का पहला अंक 0 नहीं हो सकता।

गुणा संबंधी अक्षर पहेलियाँ

कुछ क्रिप्टअरिथ्म प्रश्न जोड़ के बजाय गुणा पर आधारित होते हैं। ऐसे प्रश्नों में विद्यार्थियों को इकाई अंक, कैरी तथा गुणा की प्रक्रिया का ध्यान रखते हुए प्रत्येक अक्षर का सही मान ज्ञात करना होता है। इन पहेलियों को हल करने के लिए तार्किक सोच, परीक्षण विधि तथा गलत संभावनाओं को क्रमशः हटाने की रणनीति अपनाई जाती है।

संख्याओं से खेलना का महत्व

इस अध्याय में सीखी गई अवधारणाएँ केवल पाठ्यपुस्तक तक सीमित नहीं हैं। विभाज्यता के नियम बड़ी संख्याओं की शीघ्र जाँच करने में सहायता करते हैं। व्यापक रूप विद्यार्थियों में बीजगणितीय सोच विकसित करता है, जबकि क्रिप्टअरिथ्म तार्किक निर्णय लेने और समस्या समाधान की क्षमता को मजबूत बनाते हैं। ये सभी विषय आगे चलकर बीजगणित, संख्या सिद्धांत तथा उच्च गणित के अध्ययन के लिए मजबूत आधार तैयार करते हैं।

अभ्यास प्रश्न

1. तीन अंकों की संख्या abc का व्यापक रूप लिखिए।
2. क्या 936, 9 से विभाजित होती है? कारण सहित बताइए।
3. सिद्ध कीजिए कि किसी दो अंकों की संख्या और उसके उल्टे रूप का योग सदैव 11 से विभाजित होता है।
4. क्रिप्टअरिथ्म हल करते समय पालन किए जाने वाले दो मुख्य नियम लिखिए।
5. क्या 745, 5 से विभाजित होती है? कारण सहित उत्तर दीजिए।

उत्तर

- **उत्तर 1:** तीन अंकों की संख्या abc का व्यापक रूप 100a + 10b + c होता है, जहाँ a, b तथा c क्रमशः सैकड़ा, दहाई और इकाई के अंक हैं।
- **उत्तर 2:** हाँ। 936 के अंकों का योग 9 + 3 + 6 = 18 है और 18, 9 से विभाजित होता है। इसलिए 936 भी 9 से विभाजित होती है।
- **उत्तर 3:** यदि ab = 10a + b तथा ba = 10b + a हो, तो उनका योग 11(a + b) होगा। इसलिए यह सदैव 11 से विभाजित होता है।
- **उत्तर 4:** प्रत्येक अक्षर केवल एक ही अंक का प्रतिनिधित्व करता है तथा किसी भी संख्या का पहला अंक 0 नहीं हो सकता।
- **उत्तर 5:** हाँ। 745 का अंतिम अंक 5 है। इसलिए यह 5 से पूर्णतः विभाजित होती है।