वर्ग तथा वर्गमूल

कक्षा 8 गणित

Complete Study Notes

सीखने के उद्देश्य

पूर्ण वर्ग संख्याओं तथा वर्गमूल की अवधारणा को समझना। पूर्ण वर्गों के गुणों एवं रोचक प्रतिरूपों का अध्ययन करना, पूर्ण वर्गों की पहचान करना, पाइथागोरीय त्रिक बनाना, 5 पर समाप्त होने वाली संख्याओं का वर्ग शीघ्रता से ज्ञात करना तथा बार-बार घटाने एवं अभाज्य गुणनखंडन विधि द्वारा वर्गमूल निकालना सीखना।

परिचय

वर्ग तथा वर्गमूल गणित के अत्यंत महत्वपूर्ण विषय हैं जिनका उपयोग बीजगणित, ज्यामिति, क्षेत्रमिति तथा उच्च गणित में किया जाता है। किसी संख्या का वर्ग उस संख्या को स्वयं से गुणा करने पर प्राप्त होता है, जबकि वर्गमूल वह संख्या होती है जिसका वर्ग दिए गए संख्या के बराबर हो।

पूर्ण वर्ग संख्याओं के कई विशेष गुण और प्रतिरूप होते हैं, जिनकी सहायता से बड़ी संख्याओं का वर्ग और वर्गमूल आसानी से ज्ञात किया जा सकता है। इन अवधारणाओं का ज्ञान विद्यार्थियों की गणनात्मक क्षमता तथा तार्किक सोच को मजबूत बनाता है।

पूर्ण वर्ग संख्याएँ

जब किसी प्राकृतिक संख्या को उसी संख्या से गुणा किया जाता है, तब प्राप्त संख्या को पूर्ण वर्ग (Perfect Square) कहते हैं। उदाहरण के लिए, 5 × 5 = 25, इसलिए 25 एक पूर्ण वर्ग है। इसी प्रकार 12 × 12 = 144, इसलिए 144 भी एक पूर्ण वर्ग है।

> **पूर्ण वर्ग के गुण:** किसी भी पूर्ण वर्ग का इकाई अंक केवल 0, 1, 4, 5, 6 या 9 हो सकता है। जिन संख्याओं का अंतिम अंक 2, 3, 7 या 8 होता है, वे कभी भी पूर्ण वर्ग नहीं हो सकतीं। यदि किसी संख्या के अंत में शून्य हों, तो उनकी संख्या हमेशा सम (Even) होगी।

इसके अतिरिक्त, सम संख्या का वर्ग सदैव सम तथा विषम संख्या का वर्ग सदैव विषम होता है। ये सरल गुण विद्यार्थियों को लंबी गणना किए बिना ही पूर्ण वर्गों को पहचानने में मदद करते हैं।

पूर्ण वर्गों के रोचक प्रतिरूप

पूर्ण वर्ग संख्याओं में कई सुंदर गणितीय प्रतिरूप पाए जाते हैं। सबसे महत्वपूर्ण तथ्य यह है कि पहली n क्रमागत विषम संख्याओं का योग हमेशा n^2 के बराबर होता है।
उदाहरण के लिए: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$

इसी प्रकार दो क्रमागत पूर्ण वर्गों के बीच हमेशा 2n अपूर्ण वर्ग संख्याएँ होती हैं। उदाहरण के लिए $3^2 = 9$ और $4^2 = 16$ के बीच कुल 6 संख्याएँ आती हैं (10, 11, 12, 13, 14, 15)।

एक अन्य रोचक तथ्य यह है कि दो क्रमागत त्रिभुजीय संख्याओं का योग हमेशा एक पूर्ण वर्ग बनता है। ऐसे प्रतिरूप विद्यार्थियों को संख्याओं के बीच संबंध समझने में सहायता करते हैं।

पाइथागोरीय त्रिक तथा 5 पर समाप्त होने वाली संख्याओं का वर्ग

यदि तीन प्राकृतिक संख्याएँ $a^2 + b^2 = c^2$ की शर्त को पूरा करती हैं, तो उन्हें पाइथागोरीय त्रिक कहते हैं। उदाहरण के लिए (3, 4, 5) तथा (5, 12, 13) पाइथागोरीय त्रिक हैं।

ऐसे त्रिक निम्न सूत्र द्वारा भी बनाए जा सकते हैं:
$(2m, m^2 - 1, m^2 + 1)$ जहाँ $m > 1$।

5 पर समाप्त होने वाली संख्याओं का वर्ग ज्ञात करने की एक सरल युक्ति भी है। 5 से पहले वाले अंक को उसके अगले अंक से गुणा करके अंत में 25 लिख दिया जाता है।
उदाहरण के लिए:
$25^2 = 625$
$35^2 = 1225$
$75^2 = 5625$
यह विधि मानसिक गणना को अत्यंत सरल बना देती है।

वर्गमूल ज्ञात करने की विधियाँ

वर्गमूल किसी संख्या के वर्ग की विपरीत क्रिया है। यदि $12^2 = 144$, तो $\sqrt{144} = 12$ होगा। वर्गमूल को $\sqrt{}$ चिन्ह द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

वर्गमूल ज्ञात करने की पहली विधि **बार-बार घटाने की विधि** है। इसमें दी गई संख्या में से क्रमागत विषम संख्याएँ घटाई जाती हैं। यदि अंत में शेषफल शून्य हो जाए, तो जितनी बार घटाया गया है वही उस संख्या का वर्गमूल होता है।

दूसरी प्रमुख विधि **अभाज्य गुणनखंडन विधि** है। इसमें संख्या के सभी अभाज्य गुणनखंड किए जाते हैं, समान गुणनखंडों के युग्म बनाए जाते हैं और प्रत्येक युग्म से एक-एक गुणनखंड लेकर उनका गुणनफल किया जाता है। यही उस संख्या का वर्गमूल होता है।

ये दोनों विधियाँ विद्यार्थियों को वर्गमूल की अवधारणा को गहराई से समझने में सहायता करती हैं।

वर्ग तथा वर्गमूल का महत्व

वर्ग तथा वर्गमूल का उपयोग ज्यामिति, वास्तुकला, इंजीनियरिंग, विज्ञान, सांख्यिकी तथा कंप्यूटर विज्ञान सहित अनेक क्षेत्रों में किया जाता है। इनकी सहायता से क्षेत्रफल, दूरी, समीकरण तथा अनेक वास्तविक जीवन की समस्याओं का समाधान किया जाता है। इन अवधारणाओं में दक्षता प्राप्त करने से विद्यार्थियों को आगे चलकर बीजगणित, त्रिकोणमिति तथा उच्च गणित के अध्ययन में काफी सुविधा होती है।

अभ्यास प्रश्न

1. क्या 441 एक पूर्ण वर्ग है?
2. 85 का वर्ग शॉर्टकट विधि से ज्ञात कीजिए।
3. 144 का वर्गमूल अभाज्य गुणनखंडन विधि से ज्ञात कीजिए।
4. एक पाइथागोरीय त्रिक लिखिए।
5. 8^2 और 9^2 के बीच कितनी अपूर्ण वर्ग संख्याएँ होती हैं?

उत्तर

- **उत्तर 1:** हाँ। $441 = 21 \times 21$, इसलिए यह एक पूर्ण वर्ग संख्या है।
- **उत्तर 2:** $85^2 = 7225$। 8 को उसके अगले अंक 9 से गुणा करके 72 प्राप्त होता है तथा अंत में 25 लिख दिया जाता है।
- **उत्तर 3:** $144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$। समान गुणनखंडों के युग्म बनाकर प्रत्येक युग्म से एक-एक गुणनखंड लेने पर $2 \times 2 \times 3 = 12$ प्राप्त होता है। अतः $\sqrt{144} = 12$।
- **उत्तर 4:** एक पाइथागोरीय त्रिक (3, 4, 5) है क्योंकि $3^2 + 4^2 = 5^2$।
- **उत्तर 5:** $8^2 = 64$ और $9^2 = 81$ के बीच 16 अपूर्ण वर्ग संख्याएँ होती हैं, क्योंकि नियम के अनुसार $2 \times 8 = 16$।