संख्याओं के साथ खेलना

कक्षा 6 गणित

Complete Study Notes

सीखने के उद्देश्य

इस अध्याय में विद्यार्थी संख्याओं के विभिन्न गुणों को समझेंगे। वे गुणनखंड और गुणज की पहचान करना, अभाज्य एवं संयुक्त संख्याओं में अंतर समझना, सम और विषम संख्याओं को पहचानना, सह-अभाज्य तथा जुड़वाँ अभाज्य संख्याओं का अध्ययन करना, एराटोस्थनीज़ की छलनी (Sieve of Eratosthenes) का उपयोग करके अभाज्य संख्याएँ ज्ञात करना, अभाज्य गुणनखंड करना तथा महत्तम समापवर्तक (HCF) निकालना सीखेंगे। ये अवधारणाएँ उन्नत गणित के लिए एक मजबूत नींव तैयार करती हैं और तार्किक सोच व समस्या-समाधान कौशल में सुधार करती हैं।

परिचय

संख्याओं के साथ खेलना अध्याय विद्यार्थियों को संख्याओं के रोचक गुणों और उनके आपसी संबंधों से परिचित कराता है। प्रत्येक संख्या के अपने अनूठे गुण होते हैं जो हमें गणितीय समस्याओं को अधिक कुशलता से हल करने में मदद करते हैं। गुणनखंड, गुणज, विभाज्यता, अभाज्य संख्याएँ तथा HCF जैसी अवधारणाएँ गणित की मजबूत नींव तैयार करती हैं और आगे की पढ़ाई में अत्यंत उपयोगी होती हैं।

इनका उपयोग दैनिक जीवन में वस्तुओं को समान समूहों में बाँटने, समय-सारणी बनाने तथा अनेक व्यावहारिक समस्याओं के समाधान में किया जाता है।

गुणनखंड और गुणज

किसी संख्या को बिना शेषफल के पूरी तरह विभाजित करने वाली संख्या उसका गुणनखंड कहलाती है। प्रत्येक संख्या के कम से कम दो गुणनखंड होते हैं—1 और वह संख्या स्वयं। उदाहरण के लिए, 24 के गुणनखंड 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 और 24 हैं।

किसी संख्या को पूर्ण संख्याओं से गुणा करके प्राप्त संख्याएँ उसके गुणज कहलाती हैं। गुणज अनंत होते हैं। उदाहरण के लिए, 6 के गुणज हैं 6, 12, 18, 24, 30, 36 आदि।

गुणनखंड और गुणज की समझ विद्यार्थियों को विभाज्यता तथा अन्य गणितीय अवधारणाओं व प्रतिरूपों को आसानी से समझने में सहायता करती है॰

अभाज्य, संयुक्त, सम और विषम संख्याएँ

संख्याओं को उनके गुणनखंडों के आधार पर वर्गीकृत किया जा सकता है।

- **अभाज्य संख्या:** वह होती है जिसके केवल दो गुणनखंड होते हैं—1 और वह संख्या स्वयं। जैसे 2, 3, 5, 7, 11 और 13। संख्या 2 एकमात्र सम अभाज्य संख्या है।
- **संयुक्त संख्या:** इसके दो से अधिक गुणनखंड होते हैं। जैसे 4, 6, 8, 9 और 12 संयुक्त संख्याएँ हैं क्योंकि इन्हें 1 और स्वयं के अलावा अन्य संख्याओं से भी विभाजित किया जा सकता है।
- **सम और विषम संख्याएँ:** जो संख्या 2 से पूर्णतः विभाजित हो जाती है वह सम संख्या कहलाती है, जबकि जो 2 से विभाजित नहीं होती वह विषम संख्या कहलाती है।

> **विशेष ध्यान दें:** संख्या 1 एक विशेष संख्या है क्योंकि यह न तो अभाज्य है और न ही संयुक्त।

सह-अभाज्य और जुड़वाँ अभाज्य संख्याएँ

दो संख्याएँ **सह-अभाज्य** कहलाती हैं यदि उनका केवल एक ही समान गुणनखंड हो, अर्थात् 1। उदाहरण के लिए, 8 और 15 सह-अभाज्य संख्याएँ हैं क्योंकि इनमें 1 के अलावा कोई अन्य उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

दो अभाज्य संख्याएँ जिनके बीच का अंतर ठीक 2 हो, उन्हें **जुड़वाँ अभाज्य संख्याएँ** कहा जाता है। जैसे (3, 5), (5, 7), (11, 13) तथा (17, 19)। यद्यपि ये संख्याएँ एक-दूसरे के निकट होती हैं, फिर भी दोनों अभाज्य ही रहती हैं।

इन विशेष प्रकार की संख्याओं को सीखने से विद्यार्थियों को संख्याओं के संबंधों को समझने में मदद मिलती है और वे उन्नत गणित के लिए तैयार होते हैं।

एराटोस्थनीज़ की छलनी

एराटोस्थनीज़ की छलनी एक निश्चित सीमा तक सभी अभाज्य संख्याएँ खोजने की एक सरल और व्यवस्थित विधि है। इसकी शुरुआत आमतौर पर 1 से 100 तक की संख्याएँ लिखकर की जाती है। सबसे पहले 1 को हटा दिया जाता है क्योंकि वह न अभाज्य है और न संयुक्त।

इसके बाद 2 से शुरू करके उसके सभी गुणज काट दिए जाते हैं (2 को छोड़कर)। यही प्रक्रिया 3, 5, 7 तथा अन्य बची हुई संख्याओं के साथ दोहराई जाती है। अंत में जो संख्याएँ बिना कटी बचती हैं, वे सभी अभाज्य संख्याएँ होती हैं।

यह विधि प्रत्येक संख्या की व्यक्तिगत जांच किए बिना तेजी से अभाज्य संख्याओं की पहचान करने का एक आसान तरीका प्रदान करती है।

अभाज्य गुणनखंड

किसी संयुक्त संख्या को केवल अभाज्य संख्याओं के गुणनफल के रूप में व्यक्त करना अभाज्य गुणनखंड कहलाता है। प्रत्येक संयुक्त संख्या को अभाज्य संख्याओं के गुणनफल के रूप में विशिष्ट रूप से लिखा जा सकता है।

उदाहरण के लिए:

- 24 = 2 × 2 × 2 × 3
- 60 = 2 × 2 × 3 × 5

यह विधि गणितीय गणनाओं को सरल बनाने तथा महत्तम समापवर्तक (HCF) निकालने में अत्यंत उपयोगी है।

महत्तम समापवर्तक (HCF)

दो या दो से अधिक संख्याओं को पूरी तरह विभाजित करने वाला सबसे बड़ा समान गुणनखंड महत्तम समापवर्तक (HCF) कहलाता है। HCF का उपयोग भिन्नों को सरल बनाने, वस्तुओं को समान समूहों में बाँटने तथा दैनिक जीवन की अनेक व्यावहारिक समस्याओं के समाधान में किया जाता है।

विद्यार्थी HCF की गणना तीन सामान्य विधियों से कर सकते हैं। **गुणनखंड विधि** में प्रत्येक संख्या के सभी गुणनखंडों की सूची बनाई जाती है और सबसे बड़े सामान्य गुणनखंड को चुना जाता है। **अभाज्य गुणनखंड विधि** में उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखंडों की

सबसे छोटी घातों को आपस में गुणा किया जाता है। **भाग विधि** में बड़ी संख्या को छोटी संख्या से तब तक बार-बार विभाजित किया जाता है जब तक कि शेषफल शून्य न हो जाए, यह बड़ी संख्याओं के लिए सबसे तेज़ विधि है।

अभ्यास प्रश्न

1. अभाज्य गुणनखंड विधि से 24 और 36 का HCF ज्ञात कीजिए।
2. क्या 18 and 35 सह-अभाज्य संख्याएँ हैं? कारण सहित लिखिए।
3. 72 का अभाज्य गुणनखंड कीजिए।
4. 20 से 50 के बीच की सभी अभाज्य संख्याएँ लिखिए।
5. गुणनखंड विधि से 48 और 60 का HCF ज्ञात कीजिए।

उत्तर

1. 24 = 2 × 2 × 2 × 3 तथा 36 = 2 × 2 × 3 × 3, इसलिए HCF = 12।
2. हाँ, क्योंकि 18 और 35 का केवल एक ही समान गुणनखंड 1 है।
3. 72 = 2 × 2 × 2 × 3 × 3।
4. 20 से 50 के बीच की अभाज्य संख्याएँ हैं: 23, 29, 31, 37, 41, 43 और 47।
5. 48 और 60 का HCF = 12।