द्विपद प्रमेय (Binomial Theorem)

परिचय

द्विपद प्रमेय वह प्रमेय है जिसके द्वारा **$(a + b)^n$** जैसे द्विपद व्यंजकों का विस्तार सरलता से किया जाता है। यह बार-बार गुणा किए बिना विस्तार ज्ञात करने की विधि प्रदान करता है। इसका उपयोग बीजगणित, कलन, प्रायिकता तथा उच्च गणित में व्यापक रूप से किया जाता है।

द्विपद व्यंजक

द्विपद क्या है?

द्विपद (Binomial) वह बीजीय व्यंजक है जिसमें **दो पद** होते हैं।

उदाहरण—

- **$x + y$**
- **$a - b$**
- **$2x + 3$**

द्विपद प्रमेय का उपयोग ऐसे व्यंजकों की घातों का विस्तार करने में किया जाता है।

द्विपद प्रमेय

प्रमेय का कथन

द्विपद प्रमेय के अनुसार—

$(a + b)^n$ का विस्तार अनेक पदों के योग के रूप में किया जाता है।

प्रत्येक पद में—

- एक **द्विपद गुणांक (Binomial Coefficient)**,
- **a** की एक घात,
- तथा **b** की एक घात

होती है।

विस्तार में **a** की घात क्रमशः घटती है तथा **b** की घात क्रमशः बढ़ती है।

द्विपद विस्तार

सामान्य पद

$(a + b)^n$ के विस्तार में कुल **$(n + 1)$** पद होते हैं।

सामान्य पद—

$$T_{r+1} = {}^{n}C_{r}\, a^{n-r}\, b^{r}$$

जहाँ—

- ${}^{n}C_{r}$ = द्विपद गुणांक
- **r = 0, 1, 2, … , n**

द्विपद गुणांक

Binomial Coefficients

द्विपद विस्तार के गुणांकों को **द्विपद गुणांक** कहते हैं।

इनका सूत्र है—

$${}^{n}C_{r} = n! / [r!(n - r)!]$$

महत्वपूर्ण गुण—

- ${}^{n}C_{0} = 1$
- ${}^{n}C_{n} = 1$
- ${}^{n}C_{r} = {}^{n}C_{n-r}$

पास्कल त्रिभुज

Pascal's Triangle

पास्कल त्रिभुज की सहायता से द्विपद गुणांकों को सरलता से ज्ञात किया जा सकता है।

त्रिभुज की प्रत्येक संख्या उसके ऊपर की दो संख्याओं के योग के बराबर होती है।

प्रत्येक पंक्ति के गुणांक $(a + b)^{n}$ के विस्तार के गुणांकों को दर्शाते हैं।

द्विपद विस्तार के गुण

महत्वपूर्ण तथ्य

- कुल पदों की संख्या **n + 1** होती है।
- प्रत्येक पद में घातों का योग **n** होता है।
- **a** की घात क्रमशः घटती है।
- **b** की घात क्रमशः बढ़ती है।
- गुणांक पास्कल त्रिभुज के अनुसार प्राप्त होते हैं।

मध्य पद

Middle Term

मध्य पदों की संख्या **n** पर निर्भर करती है।

- यदि **n सम** है, तो **एक मध्य पद** होता है।
- यदि **n विषम** है, तो **दो मध्य पद** होते हैं।

द्विपद प्रमेय के अनुप्रयोग

महत्व

द्विपद प्रमेय का उपयोग—

- बीजगणित
- कलन
- प्रायिकता
- सांख्यिकी
- इंजीनियरिंग
- वैज्ञानिक गणनाओं

में किया जाता है।

मुख्य बिंदु

- द्विपद व्यंजक में दो पद होते हैं।
- द्विपद प्रमेय $(a + b)^n$ का विस्तार करता है।
- विस्तार में कुल $(n + 1)$ पद होते हैं।
- सामान्य पद $T_{r+1} = {}^nC_r\, a^{n-r}\, b^r$ होता है।
- द्विपद गुणांक ${}^nC_r$ से प्राप्त किए जाते हैं।
- पास्कल त्रिभुज गुणांकों को ज्ञात करने की सरल विधि है।
- द्विपद प्रमेय का उपयोग उच्च गणित के अनेक क्षेत्रों में किया जाता है।

अध्याय सारांश

इस अध्याय में द्विपद प्रमेय, द्विपद व्यंजक, द्विपद गुणांक, सामान्य पद, पास्कल त्रिभुज तथा द्विपद विस्तार के गुणों का अध्ययन किया गया। द्विपद प्रमेय किसी भी द्विपद व्यंजक की घात का विस्तार सरलता से करने की विधि प्रदान करता है। यह अध्याय प्रायिकता, कलन तथा उच्च गणित की आगे की पढ़ाई के लिए अत्यंत महत्वपूर्ण है।