

त्रिविमीय ज्यामिति का परिचय (Introduction to Three-Dimensional Geometry)

परिचय

त्रिविमीय ज्यामिति (3D Geometry) गणित की वह शाखा है जिसमें त्रिविमीय अंतरिक्ष (Three-Dimensional Space) में बिंदुओं, रेखाओं तथा समतलों का अध्ययन किया जाता है। द्विविमीय ज्यामिति के विपरीत इसमें किसी बिंदु की स्थिति बताने के लिए **तीन निर्देशांकों (x, y, z)** का उपयोग किया जाता है। इसका उपयोग इंजीनियरिंग, वास्तुकला, कंप्यूटर ग्राफिक्स, भौतिकी, रोबोटिक्स तथा उपग्रह संचार में किया जाता है।

त्रिविमीय निर्देशांक प्रणाली

कार्तीय निर्देशांक प्रणाली

त्रिविमीय कार्तीय निर्देशांक प्रणाली में **तीन परस्पर लम्बवत अक्ष** होते हैं—

- X-अक्ष
- Y-अक्ष
- Z-अक्ष

ये तीनों अक्ष एक बिंदु पर मिलते हैं जिसे **मूल बिंदु (0, 0, 0)** कहते हैं।

अंतरिक्ष में प्रत्येक बिंदु को **(x, y, z)** के रूप में व्यक्त किया जाता है।

बिंदु के निर्देशांक

स्थिति का निरूपण

यदि किसी बिंदु के निर्देशांक **P(x, y, z)** हैं, तो—

- **x** = YZ-समतल से दूरी
- **y** = XZ-समतल से दूरी
- **z** = XY-समतल से दूरी

ये तीनों निर्देशांक मिलकर बिंदु की सटीक स्थिति बताते हैं।

अष्टांश (Octants)

अंतरिक्ष का विभाजन

तीनों निर्देशांक समतल अंतरिक्ष को **आठ भागों** में विभाजित करते हैं, जिन्हें **अष्टांश (Octants)** कहते हैं।

प्रत्येक अष्टांश में **x, y, z** के धनात्मक एवं ऋणात्मक चिह्नों का अलग-अलग संयोजन होता है।

निर्देशांक समतल

मुख्य समतल

त्रिविमीय निर्देशांक प्रणाली में तीन प्रमुख समतल होते हैं—

- XY-समतल
- YZ-समतल
- XZ-समतल

ये समतल अंतरिक्ष को विभिन्न भागों में विभाजित करते हैं तथा बिंदुओं की स्थिति ज्ञात करने में सहायता करते हैं।

दो बिंदुओं के बीच की दूरी

दूरी का सूत्र

यदि दो बिंदु—

$P(x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$

हों, तो उनके बीच की दूरी—

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

यह द्विविमीय दूरी सूत्र का त्रिविमीय विस्तार है।

खंड सूत्र (Section Formula)

रेखाखंड का विभाजन

यदि कोई बिंदु दो बिंदुओं को जोड़ने वाले रेखाखंड को $m : n$ के अनुपात में विभाजित करता है, तो उसके निर्देशांक **खंड सूत्र** द्वारा ज्ञात किए जाते हैं।

यह सूत्र रेखाखंड के किसी भी आंतरिक बिंदु के निर्देशांक ज्ञात करने में उपयोगी है।

मध्य बिंदु सूत्र

Midpoint Formula

यदि दो बिंदु—

$P(x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$

हों, तो उनका मध्य बिंदु—

$$[(x_1 + x_2)/2, (y_1 + y_2)/2, (z_1 + z_2)/2]$$

होगा ।

यह रेखाखंड को दो बराबर भागों में विभाजित करता है ।

त्रिविमीय ज्यामिति के अनुप्रयोग

महत्व

त्रिविमीय ज्यामिति का उपयोग—

- इंजीनियरिंग
- वास्तुकला
- कंप्यूटर ग्राफिक्स
- रोबोटिक्स
- नेविगेशन
- भौतिकी
- उपग्रह संचार
- गेम डिज़ाइन

में किया जाता है ।

मुख्य बिंदु

- त्रिविमीय ज्यामिति में x, y, z निर्देशांकों का उपयोग किया जाता है ।
 - तीनों अक्ष मूल बिंदु $(0, 0, 0)$ पर मिलते हैं ।
 - अंतरिक्ष आठ अष्टांशों में विभाजित होता है ।
 - तीन मुख्य समतल हैं— XY, YZ और XZ ।
 - दूरी ज्ञात करने के लिए 3D दूरी सूत्र का उपयोग किया जाता है ।
 - मध्य बिंदु सूत्र रेखाखंड के बीच का बिंदु ज्ञात करता है ।
 - त्रिविमीय ज्यामिति का उपयोग विज्ञान एवं तकनीक के अनेक क्षेत्रों में होता है ।
-

अध्याय सारांश

इस अध्याय में त्रिविमीय निर्देशांक प्रणाली, बिंदुओं के निर्देशांक, अष्टांश, निर्देशांक समतल, दूरी सूत्र, खंड सूत्र तथा मध्य बिंदु सूत्र का अध्ययन किया गया । त्रिविमीय ज्यामिति अंतरिक्ष में वस्तुओं की स्थिति को समझने का आधार प्रदान करती है और इंजीनियरिंग, वास्तुकला, कंप्यूटर ग्राफिक्स, रोबोटिक्स तथा आधुनिक विज्ञान के अनेक क्षेत्रों में अत्यंत महत्वपूर्ण है ।