समतल में गति (Motion in a Plane)

परिचय

समतल में गति से तात्पर्य किसी वस्तु की दो विमाओं में होने वाली गति से है, जैसे प्रक्षेप्य की गति या घुमावदार सड़क पर चलती कार की गति। द्विविमीय गति को समझने के लिए **सदिश, स्थिति और विस्थापन, वेग और त्वरण, प्रक्षेप्य गति तथा एकसमान वृत्तीय गति** का अध्ययन किया जाता है।

अदिश और सदिश

अदिश राशि

अदिश राशि में केवल परिमाण होता है, दिशा नहीं होती।

उदाहरण—

- दूरी
- चाल
- द्रव्यमान
- समय
- तापमान

सदिश राशि

सदिश राशि में परिमाण और दिशा दोनों होते हैं।

उदाहरण—

- विस्थापन
- वेग
- त्वरण
- बल
- संवेग

सदिश को एक तीर द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। तीर की लंबाई परिमाण और तीर का सिरा दिशा दर्शाता है।

सदिश का निरूपण

एकांक सदिश

एकांक सदिश ऐसा सदिश होता है जिसका परिमाण एक होता है। इसका उपयोग किसी सदिश की दिशा बताने के लिए किया जाता है।

x, y और z अक्षों के एकांक सदिश क्रमशः—

$\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$

एक सदिश **A** को इस प्रकार लिखा जा सकता है—

$$\mathbf{A = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + Az\hat{k}}$$

सदिशों का योग

त्रिभुज नियम

सदिश योग के त्रिभुज नियम के अनुसार, यदि दो सदिशों को क्रम से त्रिभुज की दो भुजाओं द्वारा प्रदर्शित किया जाए, तो उनका परिणामी सदिश तीसरी भुजा द्वारा विपरीत दिशा में प्रदर्शित होता है।

समांतर चतुर्भुज नियम

यदि एक बिंदु पर कार्य करने वाले दो सदिशों को समांतर चतुर्भुज की दो आसन्न भुजाओं द्वारा प्रदर्शित किया जाए, तो उनका परिणामी सदिश समांतर चतुर्भुज के विकर्ण द्वारा प्रदर्शित होता है।

यदि दो सदिश **A** और **B** के बीच कोण **θ** हो, तो—

$$\mathbf{R = \sqrt{(A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta)}}$$

सदिश का वियोजन

परिभाषा

किसी सदिश को दो परस्पर लंबवत दिशाओं में उसके घटकों में विभाजित करने की प्रक्रिया को **सदिश का वियोजन** कहते हैं।

यदि सदिश **A**, x-अक्ष से **θ** कोण बनाता है, तो—

$$\mathbf{A_x = A\cos\theta}$$

$$\mathbf{A_y = A\sin\theta}$$

अतः—

$$\mathbf{A = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}}$$

परिमाण—

$$\mathbf{A = \sqrt{(A_x^2 + A_y^2)}}$$

स्थिति और विस्थापन

स्थिति सदिश

किसी कण की मूल बिंदु के सापेक्ष स्थिति को **स्थिति सदिश** द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

$\mathbf{r = x\hat{i} + y\hat{j}}$

विस्थापन

किसी कण की स्थिति में परिवर्तन को **विस्थापन** कहते हैं।

$\mathbf{\Delta r = r_2 - r_1}$

विस्थापन एक सदिश राशि है।

वेग और त्वरण

वेग

समय के सापेक्ष विस्थापन के परिवर्तन की दर को **वेग** कहते हैं।

$\mathbf{v = dr/dt}$

औसत वेग—

$\mathbf{v_{avg} = \Delta r/\Delta t}$

त्वरण

समय के सापेक्ष वेग के परिवर्तन की दर को **त्वरण** कहते हैं।

$\mathbf{a = dv/dt}$

औसत त्वरण—

$\mathbf{a_{avg} = \Delta v/\Delta t}$

द्विविमीय गति में—

$\mathbf{v = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}}$

$\mathbf{a = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}}$

प्रक्षेप्य गति

परिभाषा

जब किसी वस्तु को वायु में प्रक्षेपित किया जाता है और उस पर केवल गुरुत्वाकर्षण बल कार्य करता है, तो उसकी गति को **प्रक्षेप्य गति** कहते हैं।

उदाहरण—

- कोण पर फेंकी गई गेंद
- ऊँचाई से फेंका गया पत्थर
- हवा में किक की गई फुटबॉल

प्रक्षेप्य गति दो गतियों का संयोजन है—

- नियत वेग वाली क्षैतिज गति
- गुरुत्वीय त्वरण वाली ऊर्ध्वाधर गति

प्रक्षेप्य गति के समीकरण

यदि किसी प्रक्षेप्य को प्रारंभिक वेग **u** से **θ** कोण पर प्रक्षेपित किया जाए—

क्षैतिज घटक—

$u_x = u\cos\theta$

ऊर्ध्वाधर घटक—

$u_y = u\sin\theta$

उड़ान का समय

प्रक्षेप्य के वायु में रहने का कुल समय—

$T = \frac{2u\sin\theta}{g}$

अधिकतम ऊँचाई

प्रक्षेप्य द्वारा प्राप्त अधिकतम ऊर्ध्वाधर ऊँचाई—

$H = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}$

क्षैतिज परास

प्रक्षेप्य द्वारा तय की गई क्षैतिज दूरी—

$R = \frac{u^2\sin 2\theta}{g}$

परास अधिकतम होता है जब—

θ = 45°

एकसमान वृत्तीय गति

परिभाषा

जब कोई वस्तु नियत चाल से वृत्तीय पथ पर गति करती है, तो उसकी गति को **एकसमान वृत्तीय गति** कहते हैं।

यद्यपि चाल नियत रहती है, लेकिन दिशा लगातार बदलती रहती है। इसलिए वेग भी बदलता रहता है और वस्तु में त्वरण होता है।

अभिकेंद्रीय त्वरण

वृत्तीय पथ के केंद्र की ओर निर्देशित त्वरण को **अभिकेंद्रीय त्वरण** कहते हैं।

$a_c = v^2/r$

इसे इस प्रकार भी लिखा जा सकता है—

$a_c = \omega^2 r$

जहाँ—

- **v** = रैखिक चाल
- **r** = त्रिज्या
- **ω** = कोणीय वेग

कोणीय वेग

परिभाषा

समय के सापेक्ष कोणीय विस्थापन के परिवर्तन की दर को **कोणीय वेग** कहते हैं।

$\omega = d\theta/dt$

रैखिक और कोणीय वेग के बीच संबंध—

$v = r\omega$

कोणीय वेग की दिशा घूर्णन के तल के लंबवत होती है।

अभिवेक्द्रीय बल

परिभाषा

किसी वस्तु को वृत्तीय पथ पर गति करते रहने के लिए आवश्यक बल को **अभिवेक्द्रीय बल** कहते हैं।

$Fc = mv^2/r$

यह हमेशा वृत्तीय पथ के वेक्द्र की ओर निर्देशित होता है।

उदाहरण—

- घूमते हुए पत्थर पर डोरी का तनाव
- ग्रहों को कक्षा में बनाए रखने वाला गुरुत्वाकर्षण बल
- घुमावदार सड़क पर वाहन के लिए अभिवेक्द्रीय बल प्रदान करने वाला घर्षण

मुख्य बिंदु

- समतल में गति द्विविमीय गति होती है।
- अदिश राशियों में केवल परिमाण होता है, जबकि सदिश राशियों में परिमाण और दिशा दोनों होते हैं।
- सदिशों को त्रिभुज या समांतर चतुर्भुज नियम से जोड़ा जा सकता है।
- किसी सदिश को परस्पर लंबवत घटकों में विभाजित किया जा सकता है।
- प्रक्षेप्य गति में क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर घटक स्वतंत्र रूप से कार्य करते हैं।
- प्रक्षेप्य का अधिकतम परास **45°** के कोण पर प्राप्त होता है।
- एकसमान वृत्तीय गति में चाल नियत रहती है, लेकिन वेग बदलता रहता है।
- अभिवेक्द्रीय त्वरण वेक्द्र की ओर निर्देशित होता है।
- **$ac = v^2/r$**
- **$v = r\omega$**
- अभिवेक्द्रीय बल **$Fc = mv^2/r$** होता है।

अध्याय सारांश

इस अध्याय में द्विविमीय गति को समझने के लिए आवश्यक अवधारणाओं का अध्ययन किया गया है। इसमें अदिश और सदिश राशियाँ, सदिशों का योग और वियोजन, स्थिति और विस्थापन सदिश, वेग और त्वरण, प्रक्षेप्य गति तथा एकसमान वृत्तीय गति शामिल हैं। समतल में गति का अध्ययन प्रक्षेप्य, वाहन, उपग्रह, ग्रहों तथा दो विमाओं में गति करने वाली अन्य वस्तुओं की गति को समझने के लिए महत्वपूर्ण है।