क्रमचय एवं संचय (Permutation and Combination)

परिचय

क्रमचय एवं संचय गणित की एक महत्वपूर्ण शाखा है, जिसमें वस्तुओं की **गिनती, व्यवस्था (Arrangement) तथा चयन (Selection)** का अध्ययन किया जाता है। इसका उपयोग प्रायिकता, सांख्यिकी, कंप्यूटर विज्ञान तथा दैनिक जीवन की अनेक समस्याओं को हल करने में किया जाता है।

गणना का मूल सिद्धांत

Fundamental Principle of Counting

यदि कोई कार्य **m** तरीकों से तथा दूसरा स्वतंत्र कार्य **n** तरीकों से किया जा सकता है, तो दोनों कार्य मिलकर

m × n

तरीकों से किए जा सकते हैं।

यही सिद्धांत क्रमचय एवं संचय का आधार है।

गुणनखंड (Factorial)

Factorial का परिचय

किसी धनात्मक पूर्णांक **n** का गुणनखंड **n!** द्वारा दर्शाया जाता है।

n! = n × (n − 1) × (n − 2) × ... × 2 × 1

महत्वपूर्ण तथ्य—

- **0! = 1**
- **1! = 1**

Factorial का उपयोग सभी क्रमचय एवं संचय के सूत्रों में किया जाता है।

क्रमचय (Permutation)

वस्तुओं की व्यवस्था

क्रमचय वह व्यवस्था है जिसमें वस्तुओं का **क्रम (Order)** महत्वपूर्ण होता है।

n विभिन्न वस्तुओं में से **r** वस्तुओं के क्रमचय की संख्या—

${}^{n}P_{r} = n! / (n − r)!$

यदि सभी **n** वस्तुओं को व्यवस्थित किया जाए, तो कुल क्रमचय—

n!

क्रमचय के प्रकार

मुख्य प्रकार

- विभिन्न वस्तुओं का क्रमचय
- पुनरावृत्ति सहित क्रमचय
- वृत्तीय क्रमचय (Circular Permutation)

वृत्तीय क्रमचय में **n** विभिन्न वस्तुओं की व्यवस्थाओं की संख्या होती है—

(n − 1)!

संचय (Combination)

वस्तुओं का चयन

संचय वह चयन है जिसमें वस्तुओं का **क्रम महत्वपूर्ण नहीं होता** ।

n विभिन्न वस्तुओं में से **r** वस्तुओं के संचय की संख्या—

$^{n}C_{r} = n! / [r!(n − r)!]$

क्रमचय एवं संचय में अंतर

Comparison

- **क्रमचय (Permutation):** व्यवस्था, जहाँ क्रम महत्वपूर्ण होता है ।
- **संचय (Combination):** चयन, जहाँ क्रम महत्वपूर्ण नहीं होता ।

उदाहरण—

- **कप्तान और उप-कप्तान चुनना** → क्रमचय
- **दो खिलाड़ियों का चयन करना** → संचय

क्रमचय एवं संचय का संबंध

Formula

क्रमचय एवं संचय के बीच संबंध—

$^nP_r = {}^nC_r \times r!$

यह सूत्र दोनों के बीच परिवर्तन करने में उपयोगी है।

क्रमचय एवं संचय के अनुप्रयोग

महत्व

क्रमचय एवं संचय का उपयोग—

- प्रायिकता
- सांख्यिकी
- कंप्यूटर विज्ञान
- कूटलेखन (Cryptography)
- समय-सारणी निर्माण
- चयन एवं व्यवस्था संबंधी समस्याएँ
- दैनिक जीवन

में किया जाता है।

मुख्य बिंदु

- गणना का आधार **Fundamental Principle of Counting** है।
- **Factorial (n!)** सभी प्रमुख सूत्रों में प्रयुक्त होता है।
- **क्रमचय** में क्रम महत्वपूर्ण होता है।
- **संचय** में क्रम महत्वपूर्ण नहीं होता।
- वृत्तीय क्रमचय का सूत्र **(n − 1)!** है।
- $^nP_r = {}^nC_r \times r!$
- ये अवधारणाएँ प्रायिकता तथा उच्च गणित के लिए अत्यंत महत्वपूर्ण हैं।

अध्याय सारांश

इस अध्याय में गणना के मूल सिद्धांत, गुणनखंड (Factorial), क्रमचय तथा संचय का अध्ययन किया गया। क्रमचय में वस्तुओं का क्रम महत्वपूर्ण होता है, जबकि संचय में केवल चयन महत्वपूर्ण होता है। अध्याय में दोनों के सूत्र, उनके प्रकार, आपसी संबंध तथा उनके व्यावहारिक अनुप्रयोगों को भी समझाया गया। यह अध्याय प्रायिकता तथा उच्च गणित की मजबूत नींव तैयार करता है।