त्रिकोणमितीय फलन (Trigonometric Functions)

परिचय

त्रिकोणमिति गणित की वह शाखा है जिसमें त्रिभुज की भुजाओं और कोणों के बीच संबंध का अध्ययन किया जाता है। कक्षा 11 में त्रिकोणमितीय फलनों को केवल समकोण त्रिभुज तक सीमित न रखकर **सभी कोणों** के लिए **एकक वृत्त (Unit Circle)** की सहायता से परिभाषित किया जाता है। इनका उपयोग गणित, भौतिकी, इंजीनियरिंग, खगोल विज्ञान तथा सर्वेक्षण में व्यापक रूप से होता है।

कोणों का मापन

डिग्री एवं रेडियन माप

कोणों को दो प्रकार से मापा जाता है—

- **डिग्री (°)**
- **रेडियन (rad)**

महत्वपूर्ण परिवर्तन:

- **180° = π रेडियन**
- **360° = 2π रेडियन**
- **1 रेडियन = 180°/π**
- **1° = π/180 रेडियन**

उच्च गणित में सामान्यतः **रेडियन माप** का प्रयोग किया जाता है।

त्रिकोणमितीय फलन

छः त्रिकोणमितीय फलन

त्रिकोणमिति के छह मुख्य फलन हैं—

- **sin θ (साइन)**
- **cos θ (कोसाइन)**
- **tan θ (टैन्जेंट)**
- **cosec θ (कोसेक्ट)**
- **sec θ (सेक्ट)**
- **cot θ (कोटैन्जेंट)**

समकोण त्रिभुज में—

- sin θ = लम्ब / कर्ण
- cos θ = आधार / कर्ण
- tan θ = लम्ब / आधार
- cosec θ = 1 / sin θ
- sec θ = 1 / cos θ
- cot θ = 1 / tan θ

किसी भी कोण के लिए त्रिकोणमितीय फलन

एकक वृत्त *(Unit Circle)*

90° से अधिक या **ऋणात्मक कोणों** के लिए त्रिकोणमितीय फलनों को **एकक वृत्त** की सहायता से परिभाषित किया जाता है।

यदि एकक वृत्त पर किसी बिंदु के निर्देशांक **(x, y)** हों, तो—

- **x = cos θ**
- **y = sin θ**

इस प्रकार त्रिकोणमितीय फलनों को सभी वास्तविक कोणों के लिए परिभाषित किया जा सकता है।

त्रिकोणमितीय फलनों के चिन्ह

चारों चतुर्थांश

त्रिकोणमितीय फलनों का चिन्ह कोण के चतुर्थांश पर निर्भर करता है।

- **प्रथम चतुर्थांश:** सभी फलन धनात्मक होते हैं।
- **द्वितीय चतुर्थांश:** केवल sin और cosec धनात्मक होते हैं।
- **तृतीय चतुर्थांश:** केवल tan और cot धनात्मक होते हैं।
- **चतुर्थ चतुर्थांश:** केवल cos और sec धनात्मक होते हैं।

इसे याद रखने के लिए **ASTC (All Students Take Coffee)** नियम का उपयोग किया जाता है।

महत्वपूर्ण त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ

Basic Identities

मुख्य सर्वसमिकाएँ—

- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
- $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$
- $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$
- $\tan\theta = \sin\theta / \cos\theta$
- $\cot\theta = \cos\theta / \sin\theta$

इनका उपयोग प्रश्नों को सरल बनाने और समीकरण हल करने में किया जाता है।

विशेष कोणों के त्रिकोणमितीय मान

Standard Values

निम्नलिखित कोणों के मान अत्यंत महत्वपूर्ण हैं—

- **0°**
- **30°**
- **45°**
- **60°**
- **90°**

इन कोणों के **sin, cos, tan, cosec, sec** तथा **cot** के मान याद रखना आवश्यक है।

त्रिकोणमितीय फलनों के ग्राफ

Graphs

sin x, **cos x** तथा **tan x** के ग्राफ उनके व्यवहार को दर्शाते हैं।

- **sin x** और **cos x** का आवर्तकाल (Period) **2π** होता है।
- **tan x** का आवर्तकाल **π** होता है।

ग्राफ की सहायता से फलनों के गुणों को आसानी से समझा जा सकता है।

त्रिकोणमिति के अनुप्रयोग

व्यावहारिक उपयोग

त्रिकोणमिति का उपयोग—

- ऊँचाई एवं दूरी ज्ञात करने में।
- इंजीनियरिंग एवं निर्माण कार्यों में।
- खगोल विज्ञान में।
- नौवहन (Navigation) में।
- सर्वेक्षण (Surveying) में।
- भौतिकी एवं कंप्यूटर ग्राफिक्स में।

मुख्य बिंदु

- कोणों को डिग्री एवं रेडियन में मापा जाता है।
- त्रिकोणमिति में छह प्रमुख फलन होते हैं।
- एकक वृत्त द्वारा सभी कोणों के लिए फलन परिभाषित किए जाते हैं।
- फलनों का चिन्ह चतुर्थांश पर निर्भर करता है।
- त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ प्रश्न हल करने में महत्वपूर्ण हैं।

- विशेष कोणों के मान याद रखना आवश्यक है।
- त्रिकोणमिति का उपयोग विज्ञान, इंजीनियरिंग और दैनिक जीवन में व्यापक रूप से होता है।

अध्याय सारांश

इस अध्याय में त्रिकोणमितीय फलनों, कोणों के मापन, एकक वृत्त, छह त्रिकोणमितीय फलनों, चतुर्थांशों में उनके चिन्ह, महत्वपूर्ण सर्वसमिकाओं, विशेष कोणों के मान तथा ग्राफों का अध्ययन किया गया। त्रिकोणमिति गणित की एक महत्वपूर्ण शाखा है जिसका उपयोग विज्ञान, इंजीनियरिंग, वास्तुकला, सर्वेक्षण और अनेक व्यावहारिक क्षेत्रों में किया जाता है।