

गणितीय आगमन का सिद्धांत (Principle of Mathematical Induction)

परिचय

गणितीय आगमन का सिद्धांत (PMI) एक महत्वपूर्ण प्रमाण विधि है जिसका उपयोग प्राकृतिक संख्याओं से संबंधित कथनों को सिद्ध करने के लिए किया जाता है। प्रत्येक संख्या की अलग-अलग जाँच करने के बजाय, यह सिद्धांत यह प्रमाणित करता है कि यदि कथन पहली संख्या के लिए सत्य है तथा एक संख्या के लिए सत्य होने पर अगली संख्या के लिए भी सत्य है, तो वह कथन सभी प्राकृतिक संख्याओं के लिए सत्य होगा।

गणितीय आगमन

गणितीय आगमन क्या है?

गणितीय आगमन प्राकृतिक संख्याओं से संबंधित कथनों को सिद्ध करने की एक प्रमाण विधि है।

यह इस विचार पर आधारित है कि यदि पहली सीढ़ी सही हो और प्रत्येक सीढ़ी अगली सीढ़ी तक पहुँचाती हो, तो पूरी सीढ़ी सही होगी।

गणितीय आगमन का सिद्धांत

सिद्धांत का कथन

मान लीजिए $P(n)$ प्राकृतिक संख्या n पर आधारित कोई कथन है।

किसी कथन को सभी प्राकृतिक संख्याओं के लिए सिद्ध करने हेतु निम्न दो चरण अपनाए जाते हैं—

- आधार चरण (Base Case):** यह सिद्ध करें कि $P(1)$ (या प्रश्न में दी गई पहली संख्या) सत्य है।
- आगमन चरण (Induction Step):** मान लें कि $P(k)$ किसी प्राकृतिक संख्या k के लिए सत्य है, फिर सिद्ध करें कि $P(k + 1)$ भी सत्य है।

यदि दोनों चरण पूरे हो जाते हैं, तो $P(n)$ सभी प्राकृतिक संख्याओं के लिए सत्य माना जाता है।

गणितीय आगमन की प्रक्रिया

Steps of Proof

गणितीय आगमन में निम्नलिखित चरण होते हैं—

- कथन $P(n)$ लिखना।
- आधार चरण की जाँच करना।
- $P(k)$ को सत्य मानना (आगमन परिकल्पना)।
- $P(k + 1)$ को सिद्ध करना।
- निष्कर्ष निकालना कि कथन सभी प्राकृतिक संख्याओं के लिए सत्य है।

आगमन परिकल्पना

Induction Hypothesis

किसी प्राकृतिक संख्या k के लिए $P(k)$ को सत्य मानने की प्रक्रिया को **आगमन परिकल्पना (Induction Hypothesis)** कहते हैं।

इसका उपयोग केवल $P(k + 1)$ को सिद्ध करने के लिए किया जाता है।

गणितीय आगमन के अनुप्रयोग

उपयोग

गणितीय आगमन का उपयोग—

- बीजीय सर्वसमिकाओं को सिद्ध करने में।
 - योग संबंधी सूत्रों को सिद्ध करने में।
 - विभाज्यता (Divisibility) सिद्ध करने में।
 - असमिकाओं (Inequalities) को सिद्ध करने में।
 - प्राकृतिक संख्याओं से संबंधित कथनों को सिद्ध करने में।
 - पुनरावर्ती संबंधों (Recursive Relations) में।
-

गणितीय आगमन का महत्व

Advantages

गणितीय आगमन—

- अनंत कथनों को केवल दो चरणों में सिद्ध करता है।
 - समय और प्रयास की बचत करता है।
 - प्रमाण की सरल एवं तार्किक विधि प्रदान करता है।
 - उच्च गणित तथा कंप्यूटर विज्ञान में व्यापक रूप से प्रयुक्त होता है।
-

महत्वपूर्ण बातें

Remember

- सबसे पहले **आधार चरण** अवश्य सिद्ध करें।
 - $P(k)$ को केवल मानकर चला जाता है, इसे अंतिम प्रमाण नहीं माना जाता।
 - प्रमाण तभी पूरा होता है जब $P(k + 1)$ सिद्ध हो जाए।
 - यह विधि केवल प्राकृतिक संख्याओं से संबंधित कथनों पर लागू होती है।
-

मुख्य बिंदु

- गणितीय आगमन प्राकृतिक संख्याओं के लिए कथनों को सिद्ध करता है।
- इसमें दो मुख्य चरण होते हैं—आधार चरण और आगमन चरण।
- $P(k)$ को सत्य मानने की प्रक्रिया आगमन परिकल्पना कहलाती है।
- यदि दोनों चरण सिद्ध हो जाएँ, तो कथन सभी प्राकृतिक संख्याओं के लिए सत्य होता है।
- यह विधि बीजगणित, संख्या सिद्धांत तथा उच्च गणित में अत्यंत महत्वपूर्ण है।

अध्याय सारांश

इस अध्याय में गणितीय आगमन के सिद्धांत का अध्ययन किया गया। यह एक शक्तिशाली प्रमाण विधि है जो प्राकृतिक संख्याओं से संबंधित कथनों को सिद्ध करने के लिए प्रयोग की जाती है। इसमें पहले आधार चरण सिद्ध किया जाता है और फिर यह दिखाया जाता है कि यदि कथन किसी संख्या के लिए सत्य है, तो अगली संख्या के लिए भी सत्य होगा। इस प्रकार यह सिद्ध होता है कि कथन सभी प्राकृतिक संख्याओं के लिए सत्य है।