संबंध एवं फलन (Relations and Functions)

परिचय

संबंध (Relation) और **फलन (Function)** गणित की महत्वपूर्ण अवधारणाएँ हैं, जिनके माध्यम से दो समुच्चयों के बीच संबंध स्थापित किया जाता है। इनका उपयोग बीजगणित, कलन (Calculus), कंप्यूटर विज्ञान तथा अनेक वैज्ञानिक क्षेत्रों में किया जाता है।

कार्तीय गुणनफल

दो समुच्चयों का गुणनफल

दो अशून्य समुच्चयों **A** तथा **B** का **कार्तीय गुणनफल** उन सभी क्रमित युग्मों **(a, b)** का समुच्चय है, जहाँ—

- **a ∈ A**
- **b ∈ B**

इसे इस प्रकार लिखा जाता है—

A × B = {(a, b) : a ∈ A तथा b ∈ B}

यदि **n(A) = m** तथा **n(B) = n**, तो—

n(A × B) = m × n

संबंध (Relation)

संबंध क्या है?

समुच्चय **A** से **B** का कोई भी **उपसमुच्चय** जो **A × B** का भाग हो, **संबंध** कहलाता है।

संबंध दो समुच्चयों के अवयवों के बीच जुड़ाव को दर्शाता है।

संबंधों के प्रकार

मुख्य प्रकार

महत्वपूर्ण संबंध हैं—

- **रिक्त संबंध (Empty Relation)**
- **सार्वत्रिक संबंध (Universal Relation)**
- **सर्वसमिका संबंध (Identity Relation)**
- **प्रतिलोम संबंध (Inverse Relation)**

फलन (Function)

फलन क्या है?

फलन एक विशेष प्रकार का संबंध है जिसमें **डोमेन (Domain)** का प्रत्येक अवयव **कोडोमेन (Codomain)** के केवल **एक** अवयव से संबंधित होता है।

इसे इस प्रकार लिखा जाता है—

f : A → B

जहाँ—

- **A = Domain**
- **B = Codomain**
- **f(A) = Range**

डोमेन, कोडोमेन एवं रेंज

महत्वपूर्ण शब्दावली

- **डोमेन (Domain):** सभी इनपुट मानों का समुच्चय।
- **कोडोमेन (Codomain):** संभावित आउटपुट मानों का समुच्चय।
- **रेंज (Range):** वास्तव में प्राप्त आउटपुट मानों का समुच्चय।

रेंज, **कोडोमेन** का उपसमुच्चय होती है।

फलनों के प्रकार

मुख्य प्रकार

- **एक-एक फलन (One-One / Injective):** प्रत्येक इनपुट का अलग आउटपुट।
- **अनेक-एक फलन (Many-One):** अनेक इनपुट का एक ही आउटपुट।
- **सर्वांगी (Onto / Surjective):** कोडोमेन का प्रत्येक अवयव रेंज में हो।
- **अंतर्गामी (Into):** कोडोमेन के कुछ अवयव रेंज में न हों।
- **एक-एक एवं सर्वांगी (Bijective):** एक-एक तथा सर्वांगी दोनों।

फलनों का आलेख

Graphical Representation

फलनों को कार्तीय तल पर ग्राफ के रूप में दर्शाया जा सकता है।

ग्राफ की सहायता से—

- डोमेन
- रेंज
- फलन का व्यवहार

आसानी से समझा जा सकता है।

कोई ग्राफ तभी फलन कहलाता है जब वह **ऊर्ध्वाधर रेखा परीक्षण (Vertical Line Test)** को संतुष्ट करे।

वास्तविक फलनों पर संक्रियाएँ

Operations on Functions

यदि **f(x)** तथा **g(x)** दो फलन हैं, तो—

- **(f + g)(x) = f(x) + g(x)**
- **(f − g)(x) = f(x) − g(x)**
- **(fg)(x) = f(x) × g(x)**
- **(f/g)(x) = f(x) ÷ g(x)** *(जहाँ $g(x) \neq 0$)*

फलनों के अनुप्रयोग

महत्व

फलनों का उपयोग—

- गणित
- भौतिकी
- अर्थशास्त्र
- इंजीनियरिंग
- कंप्यूटर विज्ञान
- सांख्यिकी

में किया जाता है।

ये विभिन्न राशियों के बीच संबंध को व्यक्त करने में सहायता करते हैं।

मुख्य बिंदु

- कार्तीय गुणनफल क्रमित युग्मों का समुच्चय है।
- संबंध, कार्तीय गुणनफल का उपसमुच्चय होता है।
- प्रत्येक फलन संबंध होता है, परंतु प्रत्येक संबंध फलन नहीं होता।
- फलन में प्रत्येक इनपुट का केवल एक आउटपुट होता है।
- डोमेन, कोडोमेन और रेंज महत्वपूर्ण अवधारणाएँ हैं।

- फलनों के प्रमुख प्रकार—एक-एक, अनेक-एक, सर्वांगी, अंतर्गामी और द्विएक (Bijective) हैं।
- फलनों का उपयोग गणित एवं विज्ञान के अनेक क्षेत्रों में किया जाता है।

अध्याय सारांश

इस अध्याय में कार्तीय गुणनफल, संबंध एवं फलन की मूल अवधारणाओं का अध्ययन किया गया। संबंध दो समुच्चयों के बीच जुड़ाव को दर्शाता है, जबकि फलन ऐसा विशेष संबंध है जिसमें प्रत्येक इनपुट का केवल एक निश्चित आउटपुट होता है। अध्याय में संबंधों एवं फलनों के प्रकार, डोमेन, कोडोमेन, रेंज तथा फलनों पर संक्रियाओं का भी अध्ययन किया गया, जो आगे की गणित के लिए अत्यंत महत्वपूर्ण हैं।