समिश्र संख्याएँ एवं द्विघात समीकरण (Complex Numbers and Quadratic Equations)

परिचय

इस अध्याय में **समिश्र संख्याओं (Complex Numbers)** का परिचय दिया गया है, जो वास्तविक संख्याओं का विस्तार हैं। साथ ही, **द्विघात समीकरणों (Quadratic Equations)** के हल तथा उनके मूलों (Roots) की प्रकृति का अध्ययन किया जाता है। इनका उपयोग गणित, भौतिकी, इंजीनियरिंग तथा विद्युत विज्ञान में व्यापक रूप से होता है।

समिश्र संख्या

समिश्र संख्या क्या है?

समिश्र संख्या का सामान्य रूप है—

z = a + ib

जहाँ—

- **a** = वास्तविक भाग (Real Part)
- **b** = काल्पनिक भाग (Imaginary Part)
- **i = $\sqrt{-1}$**, जिसे **काल्पनिक इकाई (Imaginary Unit)** कहते हैं।

महत्वपूर्ण तथ्य:

$i^2 = -1$

समिश्र संख्याओं के प्रकार

मुख्य प्रकार

- **शुद्ध वास्तविक संख्या:** काल्पनिक भाग शून्य हो। *(उदाहरण: 5 + 0i)*
- **शुद्ध काल्पनिक संख्या:** वास्तविक भाग शून्य हो। *(उदाहरण: 4i)*
- **सामान्य समिश्र संख्या:** वास्तविक एवं काल्पनिक दोनों भाग हों। *(उदाहरण: 3 + 2i)*
- **शून्य समिश्र संख्या:** वास्तविक तथा काल्पनिक दोनों भाग शून्य हों।

समिश्र संख्याओं की समानता

समान होने की शर्त

यदि

a + ib = c + id

तो—

- **a = c**
- **b = d**

अर्थात दोनों संख्याओं के वास्तविक तथा काल्पनिक भाग समान होने चाहिए।

समिश्र संख्याओं पर संक्रियाएँ

Basic Operations

समिश्र संख्याओं पर निम्न संक्रियाएँ की जाती हैं—

- जोड़
- घटाव
- गुणा
- भाग

गुणा करते समय सदैव $\mathbf{i^2 = -1}$ का प्रयोग किया जाता है।

समिश्र संख्या का संयुग्म

Conjugate

यदि

z = a + ib

तो इसका **संयुग्म (Conjugate)** होगा—

$\mathbf{\bar{z} = a - ib}$

महत्वपूर्ण गुण—

- किसी समिश्र संख्या और उसके संयुग्म का गुणनफल सदैव **वास्तविक संख्या** होता है।
- संयुग्म का उपयोग भाग की संक्रिया को सरल बनाने में किया जाता है।

समिश्र संख्या का मापांक

Modulus

यदि

z = a + ib

तो उसका **मापांक (Modulus)** होगा—

$$|z| = \sqrt{(a^2 + b^2)}$$

मापांक, मूल बिंदु से उस समिश्र संख्या की दूरी को दर्शाता है।

आर्गंड तल

Geometrical Representation

समिश्र संख्याओं को **आर्गंड तल (Argand Plane)** पर दर्शाया जाता है।

- क्षैतिज अक्ष → वास्तविक अक्ष
- ऊर्ध्वाधर अक्ष → काल्पनिक अक्ष

प्रत्येक समिश्र संख्या आर्गंड तल पर एक बिंदु द्वारा प्रदर्शित होती है।

द्विघात समीकरण

मानक रूप

द्विघात समीकरण का सामान्य रूप है—

$$ax^2 + bx + c = 0$$

जहाँ—

- $a \neq 0$
- **a, b, c** वास्तविक संख्याएँ हैं।

द्विघात समीकरण का हल

Quadratic Formula

द्विघात समीकरण के मूल निम्न सूत्र से प्राप्त किए जाते हैं—

$$x = (-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)})/2a$$

यहाँ

$$D = b^2 - 4ac$$

को **विभेदक (Discriminant)** कहते हैं।

मूलों की प्रकृति

Nature of Roots

विभेदक के आधार पर—

- **D > 0:** दो भिन्न वास्तविक मूल।
- **D = 0:** दो समान वास्तविक मूल।
- **D < 0:** दो समिश्र (काल्पनिक) मूल।

मुख्य बिंदु

- समिश्र संख्या का रूप **a + ib** होता है।
- **$i^2 = -1$**।
- प्रत्येक समिश्र संख्या का वास्तविक तथा काल्पनिक भाग होता है।
- संयुग्म में केवल काल्पनिक भाग का चिन्ह बदलता है।
- मापांक मूल बिंदु से दूरी दर्शाता है।
- आर्गंड तल पर समिश्र संख्याओं का निरूपण किया जाता है।
- द्विघात समीकरण का सामान्य रूप **$ax^2 + bx + c = 0$** है।
- विभेदक मूलों की प्रकृति निर्धारित करता है।

अध्याय सारांश

इस अध्याय में समिश्र संख्याओं की अवधारणा, उनके प्रकार, संयुग्म, मापांक तथा आर्गंड तल पर निरूपण का अध्ययन किया गया। साथ ही, द्विघात समीकरणों के हल के लिए द्विघात सूत्र तथा विभेदक के आधार पर मूलों की प्रकृति को समझाया गया। यह अध्याय उच्च गणित, इंजीनियरिंग तथा विज्ञान की आगे की पढ़ाई के लिए अत्यंत महत्वपूर्ण है।