समुच्चय (Sets)

परिचय

समुच्चय (Set) सुव्यवस्थित एवं स्पष्ट रूप से परिभाषित वस्तुओं का संग्रह होता है। इन वस्तुओं को **अवयव (Elements)** कहा जाता है। समुच्चय गणित की एक मूलभूत अवधारणा है और संबंध (Relations), फलन (Functions), प्रायिकता (Probability) तथा अन्य उच्च गणितीय विषयों का आधार है।

समुच्चय क्या है?

परिभाषा

समुच्चय स्पष्ट रूप से परिभाषित वस्तुओं का संग्रह है।

उदाहरण:

- प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय: **{1, 2, 3, 4, ...}**
- स्वरों का समुच्चय: **{a, e, i, o, u}**

समुच्चय की प्रत्येक वस्तु को उसका **अवयव** कहा जाता है।

समुच्चय का निरूपण

निरूपण की विधियाँ

समुच्चय को दो प्रकार से लिखा जाता है—

1. सूची (Roster) विधि:

इसमें सभी अवयवों को कोष्ठकों के भीतर लिखा जाता है।

उदाहरण:

A = {2, 4, 6, 8}

2. गुणधर्म (Set-Builder) विधि:

इसमें अवयवों को उनके गुण के आधार पर लिखा जाता है।

उदाहरण:

A = {x : x एक 10 से छोटी सम प्राकृतिक संख्या है}

समुच्चयों के प्रकार

मुख्य प्रकार

- **रिक्त समुच्चय (∅):** जिसमें कोई अवयव नहीं होता।
- **एकल समुच्चय:** जिसमें केवल एक अवयव हो।
- **परिमित समुच्चय:** जिसमें सीमित अवयव हों।
- **अपरिमित समुच्चय:** जिसमें अनंत अवयव हों।
- **समान समुच्चय:** जिनके सभी अवयव समान हों।
- **तुल्य समुच्चय:** जिनमें अवयवों की संख्या समान हो।
- **सार्वत्रिक समुच्चय (Universal Set):** जिसमें विचाराधीन सभी अवयव शामिल हों।

उपसमुच्चय

Subset एवं *Proper Subset*

यदि समुच्चय **A** का प्रत्येक अवयव **B** में भी हो, तो **A**, **B** का **उपसमुच्चय** कहलाता है।

प्रतीक:

$A \subseteq B$

यदि **$A \subseteq B$** तथा **$A \neq B$**, तो **A**, **B** का **वास्तविक (Proper) उपसमुच्चय** कहलाता है।

घात समुच्चय

Power Set

किसी समुच्चय के सभी संभव उपसमुच्चयों के संग्रह को उसका **घात समुच्चय (Power Set)** कहते हैं।

यदि किसी समुच्चय में **n अवयव** हों, तो उसके उपसमुच्चयों की संख्या होगी—

2^n

समुच्चयों पर संक्रियाएँ

मुख्य संक्रियाएँ

संघ (A ∪ B):

A और B के सभी अवयवों का समुच्चय।

सर्वनिष्ठ (A ∩ B):

A और B के समान अवयवों का समुच्चय।

अंतर (A – B):

वे अवयव जो A में हों लेकिन B में न हों।

पूरक (A'):

सार्वत्रिक समुच्चय के वे अवयव जो A में नहीं हैं।

वेन आरेख

चित्रात्मक निरूपण

वेन आरेख समुच्चयों को चित्र के माध्यम से प्रदर्शित करने की विधि है।

इसकी सहायता से—

- संघ
- सर्वनिष्ठ
- अंतर
- पूरक

को आसानी से समझा जा सकता है।

समुच्चयों के महत्वपूर्ण नियम

Basic Laws

- विनिमेय नियम (Commutative Law)
- साहचर्य नियम (Associative Law)
- वितरण नियम (Distributive Law)
- सर्वसमिका नियम (Identity Law)
- डी मॉर्गन के नियम (De Morgan's Laws)

ये नियम प्रश्नों को सरलता से हल करने में सहायता करते हैं।

समुच्चयों के अनुप्रयोग

उपयोग

समुच्चयों का उपयोग—

- गणित
- प्रायिकता

- सांख्यिकी
- कंप्यूटर विज्ञान
- डेटाबेस प्रबंधन
- तार्किक विश्लेषण

में किया जाता है।

मुख्य बिंदु

- समुच्चय स्पष्ट रूप से परिभाषित वस्तुओं का संग्रह है।
- समुच्चय को सूची एवं गुणधर्म विधि से प्रदर्शित किया जाता है।
- उपसमुच्चय और घात समुच्चय महत्वपूर्ण अवधारणाएँ हैं।
- संघ, सर्वनिष्ठ, अंतर और पूरक प्रमुख संक्रियाएँ हैं।
- वेन आरेख समुच्चयों का चित्रात्मक निरूपण है।
- समुच्चय गणित के अनेक अध्यायों की आधारशिला है।

अध्याय सारांश

इस अध्याय में समुच्चय की अवधारणा, उसके प्रकार, निरूपण की विधियाँ, उपसमुच्चय, घात समुच्चय तथा संघ, सर्वनिष्ठ, अंतर और पूरक जैसी संक्रियाओं का अध्ययन किया गया। वेन आरेख इन संक्रियाओं को समझने का सरल माध्यम है। समुच्चयों का उपयोग गणित, कंप्यूटर विज्ञान, प्रायिकता और अनेक अन्य क्षेत्रों में किया जाता है।