सीमाएँ एवं अवकलज (Limits and Derivatives)

परिचय

सीमाएँ (Limits) तथा **अवकलज (Derivatives)** कलन (Calculus) की आधारभूत अवधारणाएँ हैं। **सीमा** किसी फलन के उस मान को दर्शाती है जिसके निकट वह पहुँचता है, जबकि **अवकलज** किसी फलन के परिवर्तन की तात्कालिक दर (Instantaneous Rate of Change) को दर्शाता है। इनका उपयोग गणित, भौतिकी, इंजीनियरिंग, अर्थशास्त्र तथा अनेक वैज्ञानिक क्षेत्रों में किया जाता है।

सीमा (Limit)

सीमा क्या है?

सीमा वह मान है जिसकी ओर कोई फलन अग्रसर होता है जब उसका चर किसी निश्चित मान के निकट पहुँचता है।

इसे इस प्रकार लिखा जाता है—

$\lim_{x \to a} f(x) = L$

अर्थात जब **x**, **a** के निकट पहुँचता है, तब **f(x)** का मान **L** के निकट पहुँचता है।

सीमाओं के गुण

Basic Properties

सीमाओं के प्रमुख गुण—

- किसी नियतांक की सीमा वही नियतांक होती है।
- योग की सीमा = सीमाओं का योग।
- अंतर की सीमा = सीमाओं का अंतर।
- गुणनफल की सीमा = सीमाओं का गुणनफल।
- भागफल की सीमा = सीमाओं का भागफल (यदि हर शून्य न हो)।

ये गुण सीमा ज्ञात करने की प्रक्रिया को सरल बनाते हैं।

मानक सीमाएँ

महत्वपूर्ण सूत्र

कुछ प्रमुख मानक सीमाएँ—

- **$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$**
- **$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$**
- **$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$**

इनका उपयोग त्रिकोणमितीय एवं घातीय फलनों की सीमाएँ ज्ञात करने में किया जाता है।

अवकलज (Derivative)

परिभाषा

अवकलज किसी फलन के **तात्कालिक परिवर्तन की दर** या किसी बिंदु पर स्पर्शरेखा की **ढाल (Slope)** को दर्शाता है।

इसे निम्न प्रकार से लिखा जाता है—

- **dy/dx**
- **f′(x)**

प्रथम सिद्धांत द्वारा अवकलज

Definition Using Limit

अवकलज की परिभाषा—

f′(x) = lim (h → 0) [f(x + h) − f(x)] / h

इसे **प्रथम सिद्धांत (First Principle)** द्वारा अवकलन कहते हैं।

अवकलन के मूल नियम

Rules

अवकलन के प्रमुख नियम—

- नियतांक नियम
- घात नियम
- योग नियम
- अंतर नियम
- गुणन नियम
- भाग नियम
- श्रृंखला नियम (Chain Rule)

ये नियम विभिन्न प्रकार के फलनों का अवकलन करने में सहायता करते हैं।

मानक फलनों के अवकलज

Common Derivatives

कुछ महत्वपूर्ण अवकलज—

- **$d/dx\ (x^n) = nx^{n-1}$**

- **$d/dx (\sin x) = \cos x$**
- **$d/dx (\cos x) = -\sin x$**
- **$d/dx (e^x) = e^x$**
- **$d/dx (\ln x) = 1/x$**

अवकलज के अनुप्रयोग

महत्व

अवकलज का उपयोग—

- वक्र की ढाल ज्ञात करने में
- वेग एवं त्वरण निकालने में
- अधिकतम एवं न्यूनतम मान ज्ञात करने में
- अर्थशास्त्र
- इंजीनियरिंग
- भौतिकी

में किया जाता है।

मुख्य बिंदु

- सीमा किसी फलन के निकट जाने वाले मान को दर्शाती है।
- अवकलज परिवर्तन की तात्कालिक दर बताता है।
- अवकलज की परिभाषा सीमा पर आधारित है।
- मानक सीमाएँ गणना को सरल बनाती हैं।
- अवकलन के अनेक महत्वपूर्ण नियम हैं।
- अवकलज का उपयोग विज्ञान, इंजीनियरिंग तथा अर्थशास्त्र में व्यापक रूप से होता है।
- कलन की शुरुआत सीमाओं एवं अवकलज से होती है।

अध्याय सारांश

इस अध्याय में सीमाओं एवं अवकलज की मूल अवधारणाओं का अध्ययन किया गया। इसमें सीमा की परिभाषा, उसके गुण, मानक सीमाएँ, प्रथम सिद्धांत द्वारा अवकलज, अवकलन के नियम तथा मानक फलनों के अवकलजों का वर्णन किया गया है। साथ ही अवकलज के व्यावहारिक अनुप्रयोगों को भी समझाया गया है। यह अध्याय आगे के कलन (Calculus) का आधार है।